Sarah OTTINGER, Stefan UFER, LMU München, Ingo KOLLAR, Universität Augsburg

Mathematisches Argumentieren und Beweisen in der Studieneingangsphase – Analyse inhaltlicher und formaler Qualitätsindikatoren

1. Hintergrund und Forschungsstand

Für viele Studierende stellt der Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik eine große Herausforderung dar (Heublein, 2014). Die unterschiedliche Akzentuierung mathematischen Argumentierens und Beweisens in den beiden Bildungsinstitutionen kann dabei als eine mögliche Ursache aufgefasst werden (Rach, 2014). Das Formulieren und Absichern mathematischer Vermutungen erfordert sowohl informelles Explorieren anhand von Beispielen und Gegenbeispielen (Koedinger, 1998) als auch das Suchen nach potentiell anwendbaren Sätzen, Definitionen und Konzepten. Der Rückgriff auf die Regeln der Logik sowie die sprachliche Struktur eines Beweises tragen dabei ebenfalls wesentlich zur Komplexität der Anforderungen bei (Epp, 2003). Studien weisen darauf hin, dass Schülerinnen und Schüler über alle Jahrgangsstufen hinweg Schwierigkeiten bei der Konstruktion mathematischer Beweise haben (u.a., Healy & Hoyles, 1998). Studienanfängerinnen und Studienanfänger scheitern häufig daran, eine logische Schlusskette zu finden und diese mit der jeweils erforderlichen sprachlichen Präzision nach den Standards der Community zu kommunizieren (Epp, 2003). In vielen Modellen zum mathematischen Argumentieren und Beweisen (Boero, 1999; Schwarz, Hershkowitz & Prusak, 2010) lassen sich im Wesentlichen zwei übergeordnete, idealisierte Prozesse identifizieren: Einerseits müssen Studierende Argumente für oder gegen eine mathematische Vermutung suchen und diese zu einer logisch stringenten Schlusskette organisieren. Dabei müssen Relationen zwischen verschiedenen mathematischen Konzepten identifiziert und nach ihrem Potential, eine mathematische Vermutung zu stützen, ausgewählt werden (Boero, 1999). Andererseits müssen die Argumente und logischen Schlüsse in akzeptabler Weise dargestellt werden, um sie der jeweiligen Community zugänglich zu machen. Dabei ist die Verwendung mathematischer Symbole, zwar nicht zwingend notwendig, aber dennoch häufig hilfreich. Der Erfolg beider Prozesse äußert sich in der von den Studierenden erstellten Lösung zu der jeweiligen Beweisaufgabe. So zeigt sich der Erfolg des Suchens nach logischen Schlüssen darin, dass zentrale Beweisideen in der Argumentation ersichtlich (Lai & Weber, 2014), Bezüge zur Rahmentheorie hergestellt (Griffiths, 2000), und Allgemeingültigkeit und Vollständigkeit des Arguments entsprechend den Anforderungen der Community erreicht werden. Darüber hinaus zeigt sich in der korrekten Verwendung der mathematischen Fachsprache und einem präzisen Umgang mit symbolischen Notationen, ob Anforderungen zur Kommunikation der gefundenen Schlüsse erfüllt wurden. Inwiefern diese inhaltliche und formale Qualität mathematischer Argumentationen und Beweise zusammenhängen, wurde trotz der Thematisierung beider Aspekte (bspw. Selden & Selden, 2011) bislang noch nicht analysiert. Nach Selden und Selden (2009) finden sich Hinweise darauf, dass in bestimmten Teilen eines Beweises vorwiegend die Qualität der Problemlöseprozesse wiedergespiegelt wird (*problem-centered part*), während andere Teile eines Beweises davon geprägt sind, dass sie stark mit der formalen Qualität verknüpft sind (*formal-rhetorical part*).

2. Ziele und Fragestellungen

Ziel der Studie war, die inhaltliche und formale Qualität mathematischer Argumentationen und Beweise von Studienanfängerinnen und Studienanfängern systematisch zu untersuchen. Dabei sind folgende Forschungsfragen zentral: (1) Welche inhaltlichen und formalen Schwierigkeiten haben Studienanfänger(innen) bei der Konstruktion mathematischer Argumentationen und Beweisen? (2) Bilden die Qualitätsindikatoren mathematischer Argumentationen und Beweise ein ein-dimensionales Konstrukt oder beschreibt ein zweidimensionales Modell mit einer inhaltlichen und einer formalen Komponente die vorgefundenen Daten besser?

3. Design

Es wurde ein querschnittliches Design mit einem Test zur mathematischen Beweis- und Argumentationskompetenz in der Teilbarkeitslehre (Reichersdorfer, Vogel, Fischer, Kollar, Reiss & Ufer, 2012) gewählt. 159 Studienanfänger(innen) der Studiengänge Bachelor Mathematik, Wirtschaftsmathematik und gymnasiales Lehramt (72 weiblich, $M_{\text{Alter}} = 19.67$ Jahre, $SD_{\text{Alter}} = 3.18$) nahmen im Rahmen eines freiwilligen Brückenkurses an der Erhebung teil. Die schriftlichen Studierendenlösungen wurden sowohl auf ihre inhaltliche als auch formale Qualität hin kodiert. Die inhaltliche Qualität wurde anhand einer vierstufigen Skala beurteilt. Zur Analyse der formalen Qualität wurde je eine ordinalskalierte Variable zur korrekten Darstellung von Implikationen und Äquivalenzen, zur Darstellung von Teilbarkeitsrelationen, zur Kennzeichnung von Definitionen, zur Verwendung von Variablen sowie Quantifizierungen entwickelt. Die Lösungen wurden von zwei unabhängigen Ratern kodiert und es konnte über alle Variablen hinweg eine gute Interrater-Reliabilität erreicht werden. Zur Beantwortung der zweiten Fragestellung wurde eine explorative Faktorenanalyse durchgeführt, wobei die hierarchische Struktur der Daten (mehrere Items pro Schüler) und die Verteilung der Qualitätsindikatoren (robuste Maximum-Likelihood-Schätzer) berücksichtigt wurden.

4. Ergebnisse

Die Ergebnisse weisen darauf hin, dass insbesondere das Finden längerer Schlussketten Probleme bereitet. Außerdem können Resultate bisheriger Studien gestützt werden (vgl. Reichersdorfer et al., 2012): Das Widerlegen mathematischer Aussagen stellt im Vergleich zu technischen Beweisen, komplexen Beweisen und dem Identifizieren und Beweisen wahrer Aussagen geringere Herausforderungen an die Studienanfänger(innen). Definitionen wurden insgesamt am seltensten symbolisch gekennzeichnet, während Variablen sehr häufig Verwendung fanden. Der Verzicht auf formale Notationen wurde für den entsprechenden formalen Indikator als fehlender Wert kodiert und hatte, soweit nicht zwingend erforderlich, keine negativen Auswirkungen für die Bewertung der formalen Qualität. Ergebnisse zu den formalen Qualitätsindikatoren zeigen auf, dass die Darstellung von Definitionen und die Verwendung von Quantoren am meisten von Fehlern behaftet war. In Bezug auf die zweite Forschungsfrage zeigte sich, dass das zwei-dimensionale Modell dem ein-dimensionalen Modell signifikant überlegen ist. Die beiden Faktoren korrelierten mäßig und positiv. Auf dem ersten Faktor laden neben der inhaltlichen Qualität die formalen Qualitätsindikatoren „Darstellung der Teilbarkeitsrelation" und „Darstellung von Implikationen/Äquivalenzen". Der zweite Faktor war von den formalen Qualitätsindikatoren zur „Verwendung von Variablen", zur „Verwendung von Quantoren" und zur „Darstellung von Definitionen" geprägt.

4. Diskussion und Implikationen

Zusammenfassend repliziert die berichtete Studie zunächst die Ergebnisse bisheriger Studien: Sowohl das Finden einer Kette logischer Schlüsse als auch das Kommunizieren dieser Schlüsse mit formaler Präzision stellt für Studierende eine substantielle Hürde dar (u.a., Epp, 2003; Selden & Selden, 2009; 2011). Unseres Wissens ist diese Studie der erste Versuch, Zusammenhänge zwischen inhaltlichen und formalen Qualitätsindikatoren systematisch zu betrachten. Die Ergebnisse der explorativen Faktorenanalyse stützen zum einen die These, dass bestimmte formale Indikatoren (wie die Darstellung von Implikationen und Teilbarkeitsrelationen) eng mit der inhaltlichen Qualität verknüpft sind, was möglicherweise darauf zurückgeführt werden kann, dass diese formalen Aspekte Relationen zwischen mathematischen Objekten (Zahlen, Aussagen und Argumenten) beschreiben. Andererseits wird die Behauptung gestützt, dass gewisse formale Aspekte wie die Verwendung von Quantoren, Variablen und Definitionen weitgehend unabhängig von der inhaltlichen Qualität sind. Diese Indikatoren haben gemeinsam, dass sie zur Einführung und Beschreibung mathematischer Objekte verwendet werden. Die Ergebnisse legen also zur Thematisierung mathematischer Symbole zwei Strategien nahe: Einerseits können bestimmte formale Aspekte anscheinend relativ unabhängig vom konkreten

Inhalt betrachtet werden. Bei Aspekten, die enger mit der Bewältigung inhaltlicher Anforderungen verwoben sind, scheint es hingegen sinnvoll, sie im Kontext konkreter Beweisversuche zu diskutieren.

Literatur

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, 7/8.*

Epp, S. S. (2003). The role of logic in teaching proof. *American Mathematical Monthly, 110* (10), 886-899.

Healy, L. & Hoyles, C. (1998). *Justifying and Proving in School Mathematics: Technical Report on the Nationwide Survey*. London: Institute of Education.

Heublein, U. (2014). Student Drop-out from German Higher Education Institutions. *European Journal of Education 4*, 497-513.

Griffiths, P.A. (2000). Mathematics at the Turn of the Millennium. *The American Mathematical Monthly, 107*(1), 1-14.

Koedinger, K. R. (1998). Conjecturing and argumentation in high school geometry students. In Lehrer, R. and Chazan, D. (Eds.), *New Directions in the Teaching and Learning of Geometry.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lai, Y. & Weber, K. (2014). Factors mathematicians profess to consider when presenting pedagogical proofs. *Educational Studies in Mathematics, 85,* 93-108.

Rach, S. (2014). Charakteristika von Lehr-Lern-Prozessen im Mathematikstudium: Bedingungsfaktoren für den Studienerfolg im ersten Semester. Münster: Waxmann.

Reichersdorfer, E., Vogel, F., Fischer, F., Kollar, I., Reiss, K., & Ufer, S. (2012). Different collaborative learning settings to foster mathematical argumentation skills. In T. Tso (Ed.): *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, 345-352.

Schwarz, B. B., Hershkowitz, R., & Prusak, N. (2010). Argumentation and mathematics. In K. Littleton & C. Howe (Eds.), Educational Dialogues: Understanding and Promoting Productive Interaction. (S. 103-127). London, UK: Taylor & Francis.

Selden, J., & Selden, A. (2009). Teaching proving by coordinating aspects of proofs with students' abilities. In M. Blanton, D. Stylianou, & E. Knuth (Eds.), *The learning and teaching of proof across the grades* (S. 339-354). London: Taylor & Francis.

Selden, A., & Selden, J. (2011). Mathematical and non-mathematical university students' proving difficulties. In L. R. Wiest & T. D. Lamberg (Eds.), *Proceedings of the 33rd annual conference of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (S. 675–683). Reno, NV.